

Schwarze Löcher und Quasinormale Moden

Dorothea Deeg

LMU München

SFB 375 Astroteilchenphysik Teilprojekt B5

Leiter Viatcheslav Mukhanov

Überblick

Schwarze Löcher und Quasinormale Moden

- Was sind Quasinormale Moden?
- Grenzfall starker Dämpfung
- Quasinormale Moden und Entropie
- Gestörtes Schwarzes Loch
- Erste numerische Ergebnisse
- Zusammenfassung

Quasinormale Moden

Klein-Gordon-Gleichung

- Masseloses Skalarfeld Φ in Schwarzschild-Metrik

$$\square\Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi) = 0$$

- Separation der Variablen

$$\Phi_{lm} = \frac{\Psi(r, t)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

- Ansatz für ebene Wellen

$$\Psi_\omega(r, t) = \psi(r)e^{-i\omega t}$$

Quasinormale Moden

Regge-Wheeler Gleichung

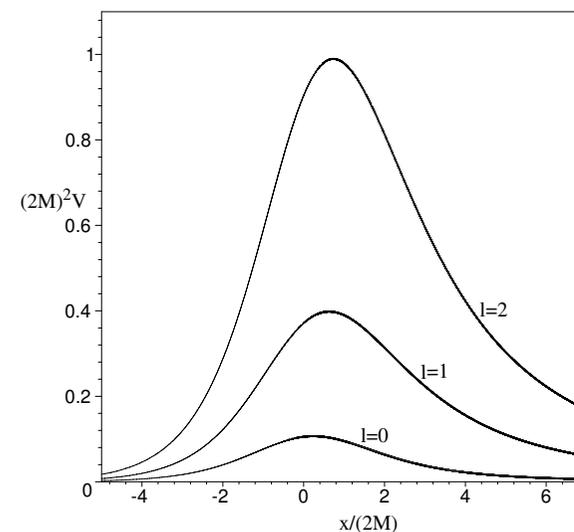
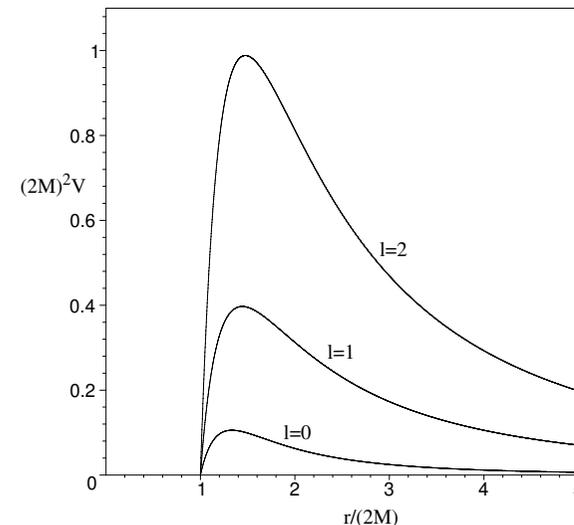
- Darstellung in Schildkröten Koordinaten x

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 - V(r) \right) \psi(x) = 0,$$

mit effektivem Potential

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right).$$

(Regge,Wheeler,1957)

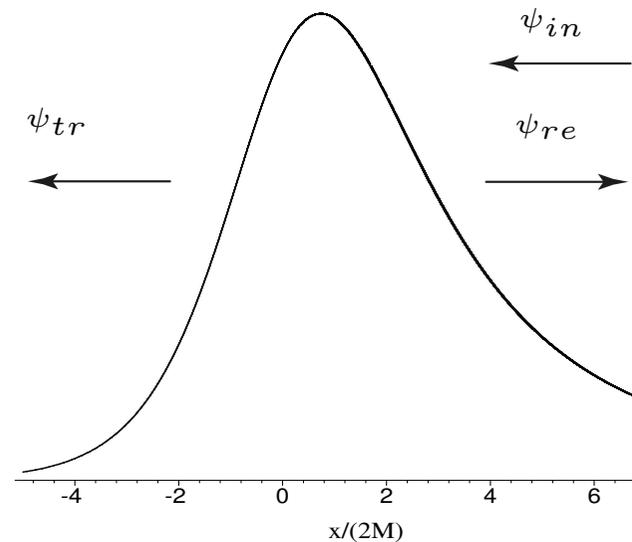
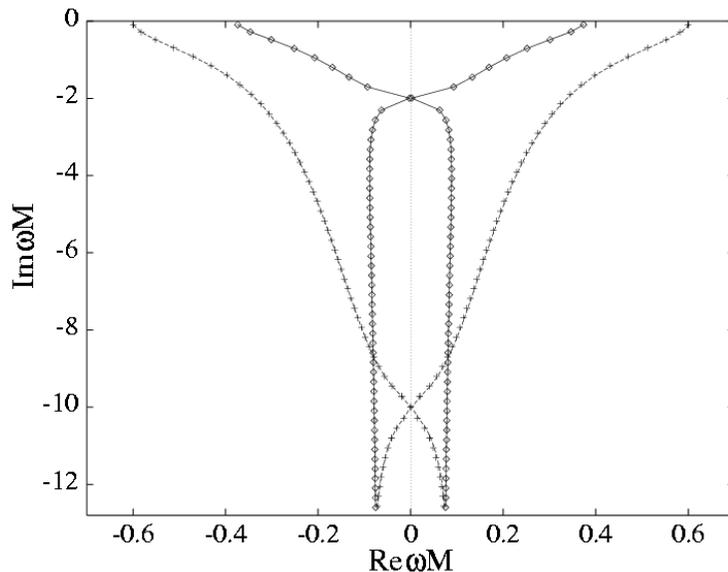


Quasinormale Moden

Randbedingungen

- rein auslaufende Lösungen
- exponentiell gedämpfte Störungen

$$\psi \sim e^{-i\omega t \mp i\omega x} \quad \text{für } x \rightarrow \mp \infty$$



Grenzfall starker Dämpfung ($n \gg 1$)

- Numerisch:

$$2M\omega_n \approx 0.0874247 - \frac{i}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

- Analytisch:

$$\omega_R = \frac{\ln(3)}{8\pi M}$$

Quasinormale Moden

Allgemeine Lösung

$$\psi(\omega, r) = (r - 1)^{-i\omega} r^{2i\omega} e^{i\omega(r-1)} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\frac{r-1}{r} \right)^m$$

- Randbedingung am Horizont ist erfüllt
- Randbedingung im Unendlichen führt zu Rekursionsformel für Koeffizienten
- Numerisch: „Method of continued fraction“

(Leaver 1985), (Nollert 1993), (Motl 2003)

QNM und Entropie

- klassische Oberfläche $A = 16\pi M^2$
- Quantisierung der Oberfläche $A_n = \gamma l_{Pl}^2 n$
- Bohr'sches Korrespondenzprinzip:

$$dM = E = \hbar\omega$$

- Übergangsfrequenz

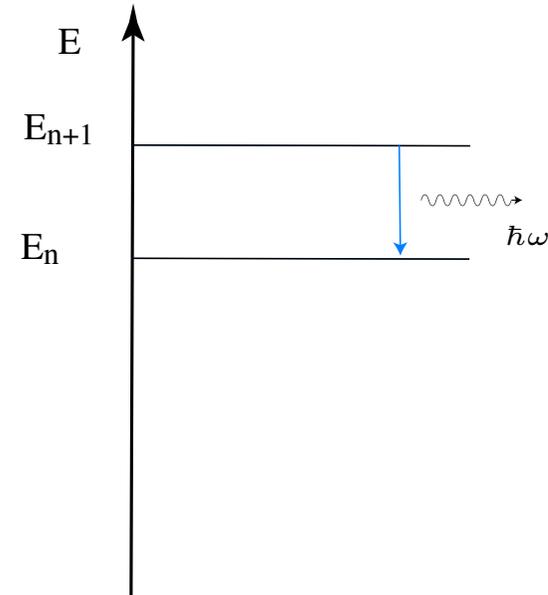
$$\omega \hat{=} \omega_R = \frac{\ln(3)}{8\pi M}$$

- Bestimmung des freien Parameters γ

$$A_n = 4 \ln(3) l_{Pl}^2 n$$

- Entropie

$$S = A / (4l_{Pl}^2)$$



(Hod 2000), (Dreyer 2003)

Gestörtes Schwarzschild Schwarzes Loch

- **Betrachte:** Dünne Kugelschale um sphärisch symmetrisches Schwarzes Loch mit Masse M im Abstand $r_K > r_S$

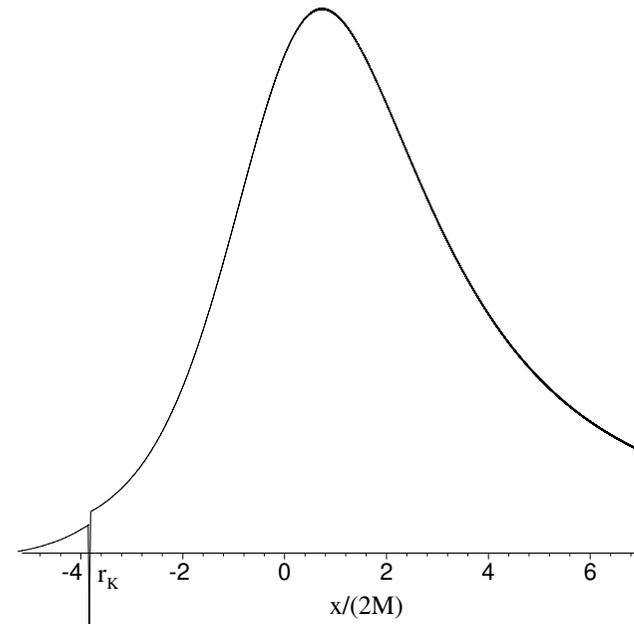
- Gesamtmasse im Unendlichen

$$M_0 = M(1 + \mu)$$

- Unstetigkeit in der Metrik bei r_K führt zu einem Sprung im Potential

- Matching Condition bestimmt QNMs

$$\left[\frac{\psi'(\omega, x)}{\psi(\omega, x)} \right]_{\pm} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x_S - \epsilon}^{x_S + \epsilon} V(x) dx.$$



(Leung *et al.* 1999)

Gestörtes Schwarzschild Schwarzes Loch

- Parametrische Lösung innerhalb

$$\psi_{-}(\tilde{\omega}, \tilde{r}) = (\tilde{r} - 1)^{-i\tilde{\omega}} \tilde{r}^{2i\tilde{\omega}} e^{i\tilde{\omega}(\tilde{r}-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{a}_m \left(\frac{\tilde{r} - 1}{\tilde{r}} \right)^m$$

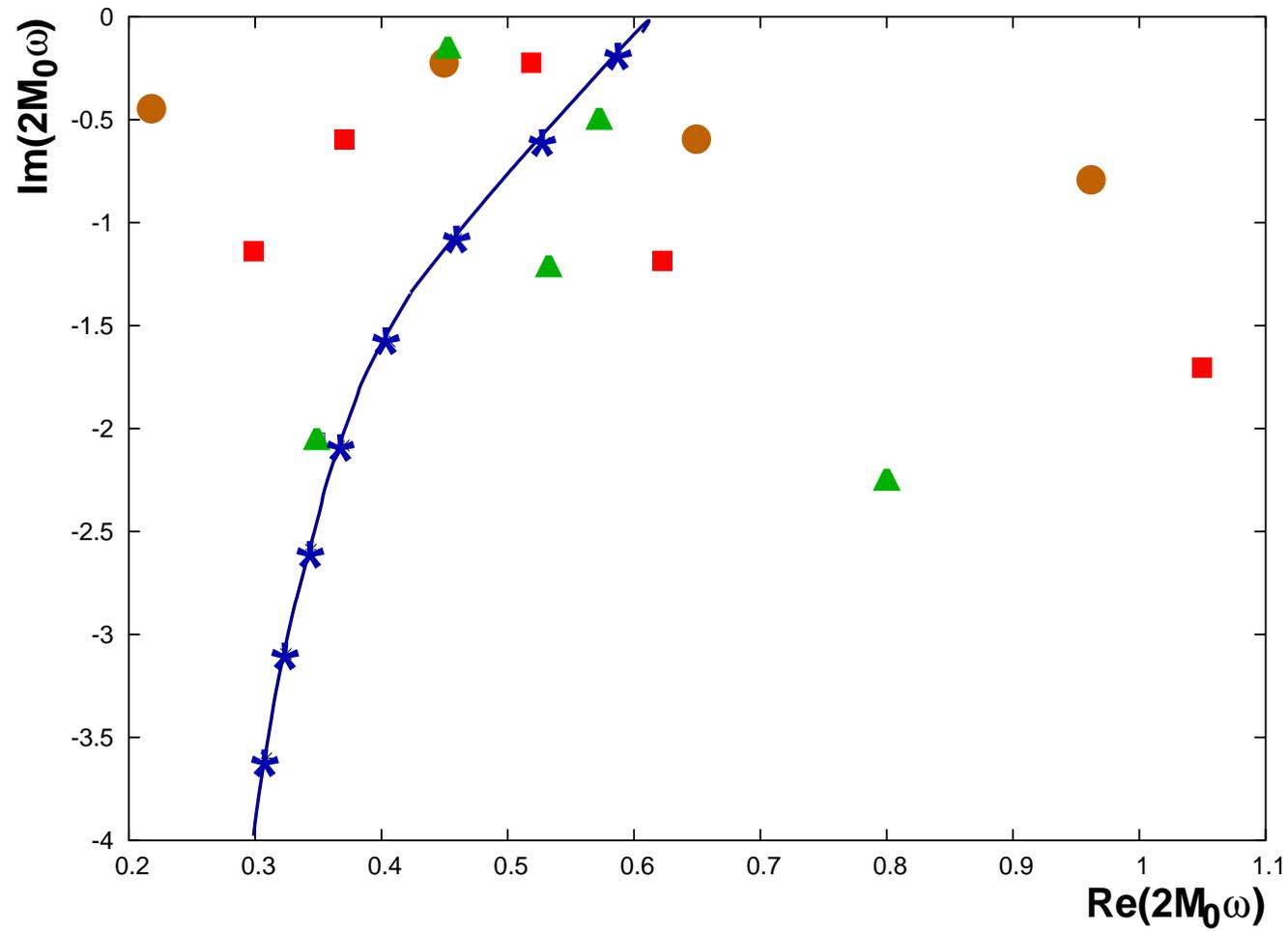
- Parametrische Lösung außerhalb

$$\begin{aligned} \psi_{+}(\hat{\omega}, \hat{r}) &= \hat{r} (\hat{r} - 1)^{-i\hat{\omega}} e^{i\hat{\omega}(\hat{r}-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{a}_m (1 - 2i\hat{\omega})_m \\ &\quad \times U(1 + m - 2i\hat{\omega}, 1, -2i\hat{\omega}\hat{r}) \end{aligned}$$

- Numerische Nullstellensuche für gegebene Parameter

$$\mathbf{F}(\omega) \equiv \left[\frac{\psi'(\omega, x)}{\psi(\omega, x)} \right]_{\pm} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x_S - \epsilon}^{x_S + \epsilon} V(x) dx = 0$$

Erste numerische Ergebnisse für $l = 1$



Zusammenfassung

Quasinormale Moden des Schwarzschild Schwarzen Lochs:

- Charakteristische Lösungen der Regge-Wheeler-Gleichung
- Verbindung zur Entropie?
- Untersuchung eines gestörten Schwarzen Lochs
- Stützung oder Widerlegung?
- Antwort bei großen Imaginärteilen der Frequenz