

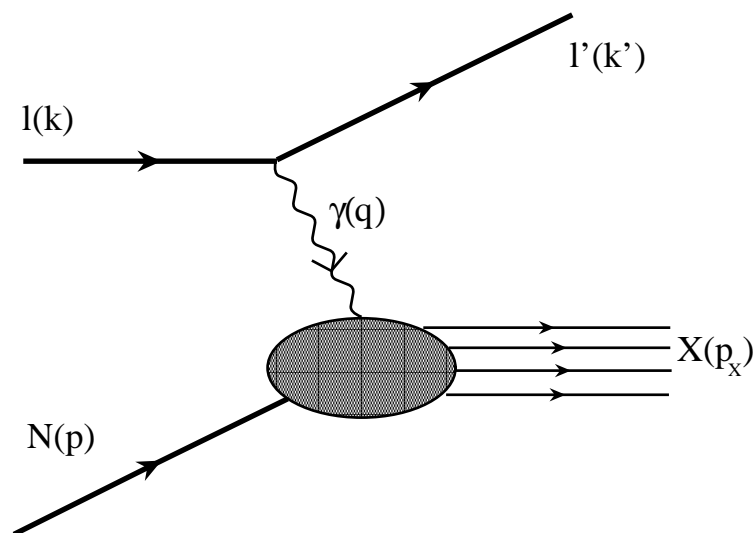
# Hadronische Strukturfunktionen in höheren Ordnungen

Aleksandar Rakić  
(Universität Bielefeld)

---

- Worum geht es und wozu brauchen wir höhere Ordnungen?
  - Die starke Kopplungskonstante in NLO und NNLO
  - QCD-Evolution und Strukturfunktionen
  - Faktorisierung
  - Fits und Resultate
    - NNLO-Fit an Daten liefert Grundlage
    - Analyse in NNLO notwendig / redundante Terme liefern keinen maßgeblichen Fehler
-

- BCDMS Experiment @ CERN 1978-1985



- Inklusive Lepton-Nukleon-Streuung

$$(l + N \longrightarrow l' + X)$$

$$Q^2 = -q^2 \quad , \quad x = \frac{Q^2}{2 p \cdot q}$$

- 2 unabh. Freiheitsgrade bei  $s = (k + p)^2 = const.$
- $Q^2$  : Virtualität, "Auflösungsvermögen"
- $x$  : Impulsbruchteil des getroffenen Quarks

- *Deeply inelastic scattering* (DIS): NLO Standard
  - Immer präzisere Meßdaten aus DIS verfügbar
  - Steigerung der Genauigkeit theor. Vorhersagen
  - Tevatron, LHC, . . .
- PDFs sind für eine moderne Analyse maßgeblich
  - PDFs in NNLO: Behandlung der zugehörigen DGLAP-Evolutionsgleichung in dieser Ordnung
  - Skalenabhängigkeit der PDFs ← Splittingfunktionen
  - Hadronische (photonische) SF werden aus den evolvierten PDFs sowie Wilson-Koeffizienten (WK) zusammengesetzt
  - NNLO-Fit an Daten  $\longrightarrow \alpha_s^{NNLO}(M_Z^2)$ , PDFs
- NNLO-WK: sind vollständig bekannt [Van Neerven, Zijlstra '91]
- NNLO-Splittingfunktionen: bis vor kurzem kompakte Näherungslösungen [Van Neerven, Vogt '00], Durchbruch im März '04 [Moch, Vermaseren, Vogt]

Verhalten der **starken Kopplung** gegenüber dem Renormierungspunkt ( $\mu_r^2 = Q^2$ ) wird durch RGE ausgedrückt:

$$\frac{da_s}{d \ln Q^2} = -\beta_0 a_s^2 - \beta_1 a_s^3 - \beta_2 a_s^4 - \beta_3 a_s^5 - \dots$$

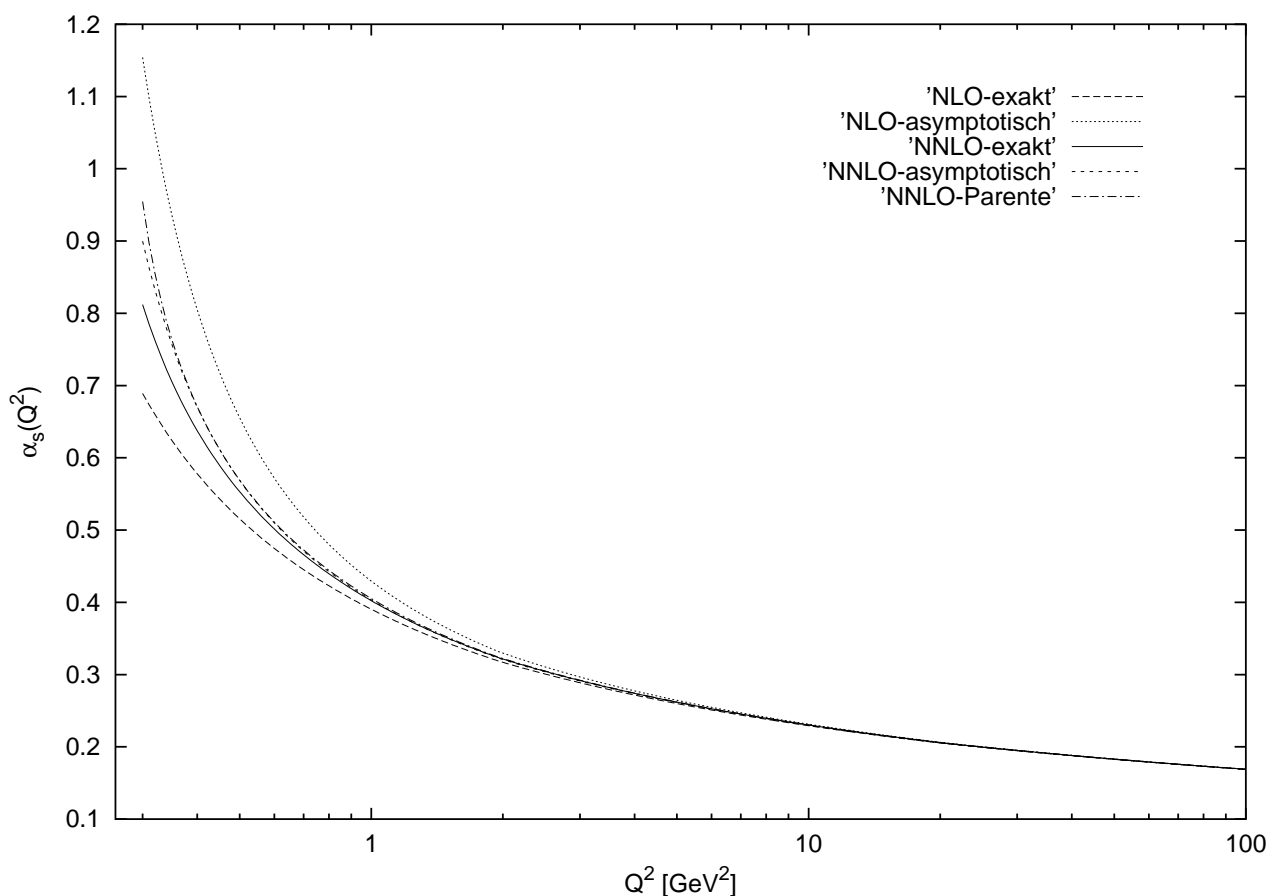
Formale Integration der **NLO-RGE** liefert:

$$\ln \left( \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right) = \frac{1}{\beta_0 a_s} - \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \ln \left[ \frac{1}{\beta_0 a_s} + \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \right]$$

Parametrisierung der Integrationskonstanten bei Fixpkt.  $Q_0^2$  durch  $\Lambda \rightarrow$  sog. **QCD-Skalenparameter**

Analoges Verfahren bei der **NNLO-RGE** führt auf:

$$\ln \left( \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right) = \frac{1}{\beta_0 a_s} - \frac{\beta_1}{2\beta_0^2} \ln \left( \frac{\beta_2}{\beta_0^3} + \frac{\beta_1}{\beta_0^3 a_s} + \frac{1}{(\beta_0 a_s)^2} \right) + \frac{2\beta_2\beta_0 - \beta_1^2}{\beta_0^4 \sqrt{D}} \arctan \left( \frac{2\beta_2 a_s + \beta_1}{\beta_0^2 \sqrt{D}} \right)$$



- **Skalenevolution Quark- und Gluondichten** ← **DGLAP**  
Im x-Raum:  $2N_f + 1$  gekoppelte Dgln.
- Aufteilung der PDFs in Singlet- und Non-Singlet-Sektor

$$\mathbf{S} : \quad \mathbf{q} \equiv \begin{pmatrix} \Sigma \\ G \end{pmatrix} \quad , \quad \Sigma \equiv \sum_{i=1}^{N_f} (q_i + \bar{q}_i)$$

$$\mathbf{NS} : \quad q_{NS,i}^- \equiv q_i - \bar{q}_i \quad , \quad q_{NS,l}^+ \equiv \sum_{i=1}^j (q_i + \bar{q}_i) - j(q_j + \bar{q}_j)$$

Non-Singlet-Evolutionsgleichungen im x-Raum:

$$\frac{d}{d \ln \mu_f^2} q_{NS}^\pm(x, \mu_f^2, \mu_r^2) = \mathcal{P}_{NS}^\pm \left( x, a_s(\mu_r^2), \frac{\mu_f^2}{\mu_r^2} \right) \otimes q_{NS}^\pm(x, \mu_f^2, \mu_r^2)$$

**Splittingfunktionen** werden perturbativ in  $a_s$  entwickelt:

$$\mathcal{P}_{NS}^\pm = a_s(Q^2) P_{NS}^{(0)\pm}(x) + a_s^2(Q^2) P_{NS}^{(1)\pm}(x) + a_s^3(Q^2) P_{NS}^{(2)\pm}(x) + \dots$$

Entwicklung der **Wilson-Koeffizienten**:

$$C_{i,NS}^\pm = \delta(1-x) + a_s(Q^2) C_{i,NS}^{(1)\pm}(x) + a_s^2(Q^2) C_{i,NS}^{(2)\pm}(x) + \dots$$

Damit lassen sich nunmehr NS-SF darstellen:

$$\eta_i F_{i,NS}^\pm(x, Q^2) \equiv \left[ C_{i,NS}^\pm \left( \alpha_s(\mu_r^2), \frac{Q^2}{\mu_f^2}, \frac{\mu_f^2}{\mu_r^2} \right) \otimes q_{NS}^\pm(\mu_f^2, \mu_r^2) \right] (x)$$

- Umgang mit Infrarot- $\infty$  in DIS  $\rightarrow$  **Faktorisierung (F)**
- Idee: phys. Observablen enthalten keine Divergenzen
- **faktoriere**  $SF = WK(\text{pert.}) \times PDF(\neg \text{pert.})$
- nunmehr: PDF  $\rightarrow PDF(\mu_f^2)$  Bestimmung aus Exp.
- **WK** bleiben Ordnung für Ordnung **berechenbar**
- **F** in höheren Ordnungen nicht mehr eindeutig
- Versch. **Faktorisierungsschemata (FS)**:  $\overline{MS}$ , DIS liefern versch. Zwischenergeb. für Splittf., WK
- Eine solche Faktorisierung bei QCD-Observablen immer möglich: **F-Theorem** [Collins et al '89]

- $\exists$  allg. Lösungsformalismen für DGLAP
- In NLO erstmals durch [Furmanski, Petronzio '82]
- $\forall$  Ordnungen [Blümlein, Vogt '98]

Multipliziere NLO-Lösung aus:

$$F_{2,NS}^{\pm,NLO}(N, Q^2) = \left(1 + a_s C_{NS}^{(1)}(N)\right) q_{NS}^{\pm,NLO}(N, Q^2)$$

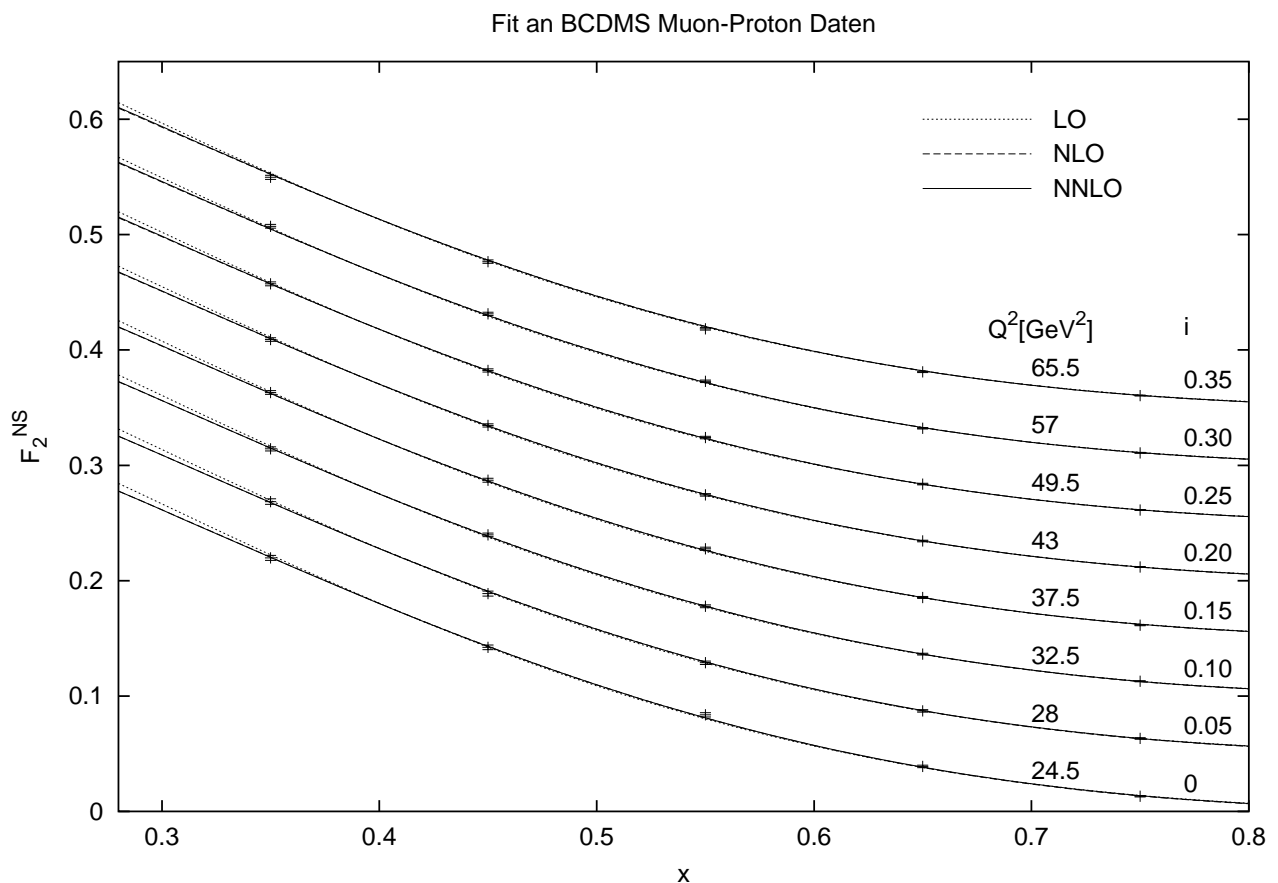
$$= \left(1 + a_s C_{NS}^{(1)}(N)\right) \left(1 - (a_s - a_0) R_1^{\pm}(N)\right) L(N) q_{NS}^{\pm,NLO}(N, Q_0^2)$$

- FS-Invarianten sind **Ordnung für Ordnung** definiert
- Redundanter  $\mathcal{O}(a_s^2)$ -Term verletzt FS-Invarianz!

Frage: Ist dieser Fehler signifikant?

- Non-Singlet-Fit an BCDMS  $p$ - und  $D$ -Daten zur SF

$$\alpha_s(M_Z^2)^{LO} = 0.130 \quad , \quad \alpha_s(M_Z^2)^{NLO} = 0.117 \quad , \quad \alpha_s(M_Z^2)^{NNLO} = 0.114$$



x	Korrektureffekt [%]	Redundanzeffekt [%]
0.72	0.455	0.512
0.74	0.394	0.566
0.76	0.312	0.625
0.78	0.203	0.691
0.80	0.064	0.765
0.82	0.113	0.850
0.84	0.338	0.948
0.86	0.626	1.062
0.88	1.002	1.198
0.90	1.506	1.364

$$\text{KE} [\%] = \left( F_{2,NS,ohne}^{NNLO,+}(x, a_s) - F_{2,NS,ohne}^{NLO,+}(x, a_s) \right) \frac{100\%}{F_{2,NS,mit}^{NLO,+}(x, a_s)}$$

$$\text{RE} [\%] = \left( F_{2,NS,ohne}^{NLO,+}(x, a_s) - F_{2,NS,mit}^{NLO,+}(x, a_s) \right) \frac{100\%}{F_{2,NS,mit}^{NLO,+}(x, a_s)}$$

