Die relativistische Weibel-Instabilität in astrophysikalischen Plasmen

Urs Schaefer-Rolffs

12. Oktober 2005

Inhalt

1. Kosmische Magnetfelder und die Weibel-Instabilität

1.1. Kosmische Magnetfelder

- fast überall im Universum vorhanden: bei Planeten, Sternen, Galaxien oder im interstellaren und -galaktischen Medium

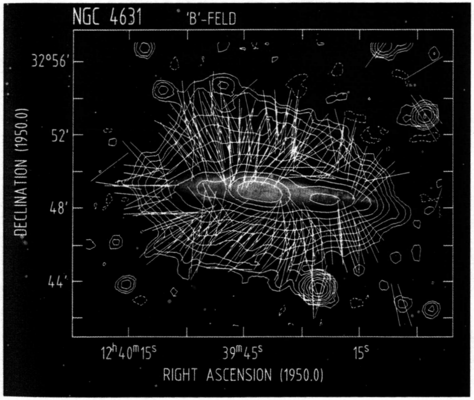

Abbildung 1: *Magnetfeld der edge-on-Galaxie NGC 4631, gewonnen aus Polarisationsmessungen bei* $\lambda = 20cm$ *von Hummel* et al. *(1988)*

- Magnetfelder wichtige Rolle bei dynamischen Prozessen (MHD)
- bei nichtthermischen Prozessen ist Erklärung ohne Magnetfelder oftmals gar nicht möglich
- drei große Gebiete zur Erforschung von kosmischen Magnetfeldern:
  - Entstehung
  - Entwicklung
  - Struktur
- Weibel-Instabilität ist eine Möglichkeit zur Erzeugung von Magnetfeldern in Plasmen

1.2. Plasmainstabilitäten

- i.A. Beschreibung eines Plasmas zunächst zeitunabhängig (stationär), also Gleichgewichtszustand
- statistischer Ansatz: Vlasovgleichung
- Frage: Wie ist der Einfluss kleiner Störungen auf das dynamische Verhalten des Plasmas?
- Störungen können sein:
  - Strömungen im Plasma
  - Anisotropien z.B. in der Plasmatemperatur oder Magnetfeld
  - Resonanzeffekte

- Normalmodenansatz $f \propto e^{i(kx-\omega t)}$ führt zu Relation

$$1 = \frac{\omega_{p,a}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \frac{f'(v_x)}{\omega - kv_x}$$

mit komplexen Lösungen ω

- aus Dispersionsbeziehung Aussage über Art der Störung möglich: Betrachtung der Frequenz ω

- Lösungen mit $\Im[\omega] > 0$ führen zu exponentiell anwachsenden Moden, andernfalls tritt Dämpfung ein

1.3. Die Weibel-Instabilität

- Weibel [1]: unmagnetisiertes Plasma mit Anisotropie, Vernachlässigung der Ionenbewegung
- Mode mit anwachsenden transversalen Wellen existiert
- verursacht nicht durch Resonanz von Alfvénwellen mit Zyklotronfrequenz oder *trapping*-Mechanismus
- stattdessen (Fried [2]) Anisotropie in Geschwindigkeitsverteilung

$$f_0(\mathbf{v}) = \delta(v_x^2 - a^2)\delta(v_y)\delta(v_z) = \frac{1}{2}\left(\delta(v_x - a) + \delta(v_x + a)\right)\delta(v_y)\delta(v_z)$$

- führt zu Verstärkung von infinitesimalen fluktuierenden Magnetfeldern

$\Rightarrow$ Man kann eine rein imaginäre Frequenz in den Dispersionsrelationen ansetzen.

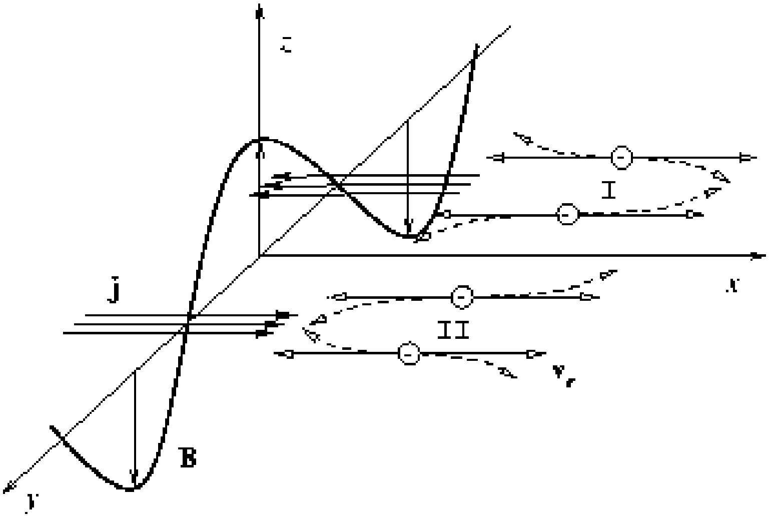

Abbildung 2: *Zur Entstehung der Weibel-Instabilität*

2. Die kovarianten Dispersionsrelationen

- ein anfänglich unmagnetisiertes Plasma, daher Dispersionsrelationen

$$\Lambda_L^+(k,\omega) = 1 + \frac{2\pi}{\omega}\sum_a \omega_{p,a}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dp_\parallel \int_0^\infty dp_\perp \frac{p_\parallel p_\perp}{\gamma_a(\omega - kv_\parallel)} \frac{\partial f_{\mathbf{k},a}}{\partial p_\parallel} \quad (1)$$

$$\Lambda_T^+(k,\omega) = 1 - N^2 + \frac{\pi}{\omega^2}\sum_a \omega_{p,a}^2 \, *$$

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} dp_\parallel \int_0^\infty dp_\perp \frac{p_\perp^2}{\gamma_a}\left(\frac{\partial f_{\mathbf{k},a}}{\partial p_\perp} + \frac{kv_\perp}{\omega - kv_\parallel}\frac{\partial f_{\mathbf{k},a}}{\partial p_\parallel}\right). \quad (2)$$

- relativistisch durch die Voraussetzung relativistischen Impulses, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}\gamma$ mit

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} \quad (3)$$

3. Reduktion der Dispersionsrelationen

zur Vereinfachung der Dispersionsrelationen folgende Schritte:

1. Annahme einer Bimaxwellverteilung. Diese stellt sich nach der Relaxation der Langmuir-Instabilität ein.

2. Geschickte Integraltransformationen ("Jonglieren")

3. zur weiteren Auswertung Fallunterscheidung:

   a) Annahme nichtrelativistischer Plasmatemperaturen $\mu_a = \frac{m_a c}{k_B T_0} \gg 1$. Diesen Fall haben wir zunächst untersucht und mit den Ergebnissen nichtkovarianter Theorien verglichen.

   b) Annahme hochrelativistischer Plasmatemperaturen $\mu_a \ll 1$. Hierzu gab es bisher kaum Arbeiten.

In beiden Fällen läuft die weitere Arbeit folgendermaßen ab: Näherungen der Besselfunktionen für die entsprechenden Grenzfälle und weiteres "Jonglieren".

3.1. Nichtrelativistisches Plasma

- Bestätigung u.a. durch Betrachtung von Spezialfällen, die frühere Ergebnisse [4] im Falle isotroper Plasmen) oder (in niedrigster Ordnung) die einfache Dispersionsrelation $\omega^2 = \sum_a \omega_{p,a}^2 + k^2 c^2$ reproduzieren.

- Einführung der Plasmadispersionsfunktion von Fried und Conte (1961) [5] bei anisotropen Plasmen:

$$\begin{aligned} Z[f] &= 2ie^{-f^2} \int_{-\infty}^{if} dt\, e^{-t^2} = i\pi^{1/2} e^{-f^2}(1 + \mathrm{erf}[if]) \\ &= \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{-x^2}}{x - f},\ \Im[f] > 0 \end{aligned} \tag{4}$$

mit

$$f = \frac{\omega}{k v_{th,a,\parallel} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{k^2 c^2}}}$$

So erhalten wir für $\mu_a \gg 1$ die relativistischen Dispersionsrelationen

1. longitudinal

$$0 = \Lambda_L^+ \simeq 1 \quad + \quad \frac{\sum_a \omega_{p,a}^2 \mu_a \left(1 + 2\psi_a \left(1 + \frac{3}{2\mu_a}\right)\right)}{k^2c^2} + \\ + \quad \frac{1}{k^2c^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \mu_a (1 + 2\psi_a) f Z^+[f] \tag{5}$$

2. transversal

$$0 = \Lambda_T^+ \simeq 1 \quad - \quad \frac{k^2c^2 + \sum_a \omega_{p,a}^2}{\omega^2} - \\ - \quad \frac{1}{2} \sum_a \frac{\omega_{p,a}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{2\psi_a}{1 - z^2}\right) (Z^+)'[f] \tag{6}$$

3.2. Hochrelativistisches Plasma

Für $\mu_a \ll 1$ finden wir die folgenden Dispersionsrelation (ebenfalls ohne Fortsetzung in die negative imaginäre ω-Ebene):

1. longitudinal

$$0 = \Lambda_L^+ \simeq 1 \quad + \quad \frac{\sum_a \omega_{p,a}^2(\mu_a + 5\psi_a)}{k^2c^2} + \\ + \quad \frac{6Y}{k^2c^2} \sum_a \omega_{p,a}^2 \psi_a \sqrt{\frac{4\psi_a}{\pi\mu_a}} \ln\left[\frac{Y - \frac{3}{5}\sqrt{\frac{\mu_a}{4\psi_a}}}{Y + \frac{3}{5}\sqrt{\frac{\mu_a}{4\psi_a}}}\right], \tag{7}$$

   wobei $Y = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$.

2. transversal

$$0 = \Lambda_T^+ = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{3Y}{k^2c^2z^4} \sum_a \omega_{p,a}^2 \psi_a \sqrt{\frac{4\psi_a}{\pi\mu_a}} \ln\left[\frac{Y - \frac{3}{5}\sqrt{\frac{\mu_a}{4\psi_a}}}{Y + \frac{3}{5}\sqrt{\frac{\mu_a}{4\psi_a}}}\right] \tag{8}$$

4. Wachstumsraten für nichtrelativistische Plasmatemperaturen

Nun nur rein imaginäre, wachsende Lösungen der Dispersionsrelation gesucht, d.h. $\omega = i\Omega,\ \Omega > 0$. Zudem weitere Vereinbarungen:

- Alle Teilchen haben dieselbe Anisotropie $\gamma^2 = \frac{v_{th,a,\parallel}^2}{v_{th,a,\perp}^2}$,
- Argument der Plasmadispersionsfunktion $f = iy,\ y = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{x}{1+x}}$

Daraus folgt für die Ableitung der Plasmadispersionsfunktion

$$Z'[f] = Z'[iy] = -2G[y]$$

mit

$$G[y] \equiv 1 - \pi^{1/2} y e^{y^2} (1 - \mathrm{erf}[y]) > 0 \quad \forall y. \tag{9}$$

Man erhält aus Dispersionsrelationen (5), (6) transzendente Gleichungen

- longitudinal

$$G\left[\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right] = -\frac{\gamma^2\kappa^2}{\mu_a}\left(1+\frac{3}{2\kappa^2}\right) < 0 \quad \forall x \tag{10}$$

  Für longitudinale Moden gibt es also **keine** Lösungen.

- transversal

$$G\left[\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right] = \gamma^2(1+\kappa^2(1+x))\frac{1+x}{1+\gamma^2 x} \tag{11}$$

  Aus der nichtrelativistischen Theorie von Kalman, Montes & Quemada [6] folgt ähnliche Beziehung

$$G\left[\frac{\sqrt{x}}{\alpha}\right] = \gamma^2(1+\kappa^2(1+x)) \tag{12}$$

- aus Betrachtungen der Gleichung (11) Näherungen für maximale Wellenzahl, analytische Approximationen für die Wachstumsraten und deren Maxima

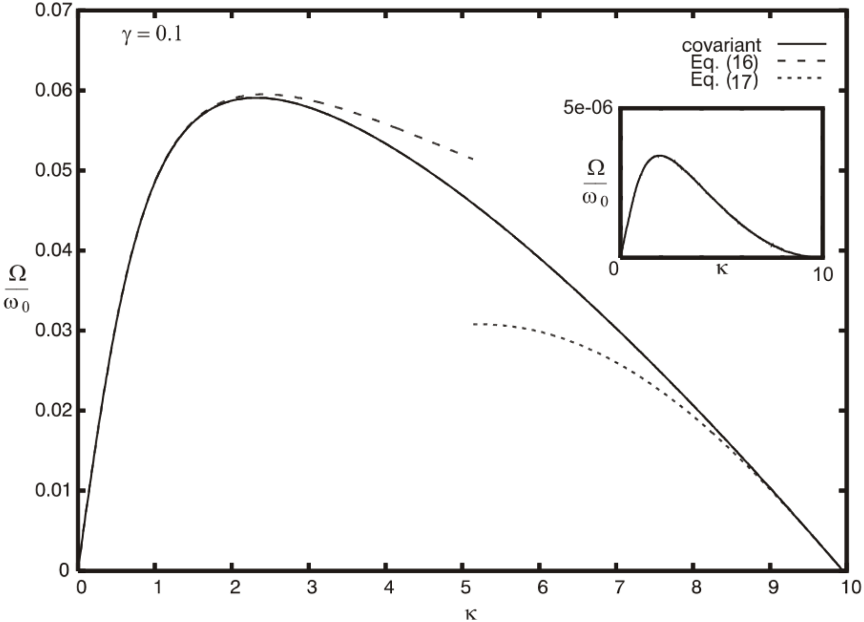

Abbildung 3: *Die Wachstumsrate Ω/ω_0 für $\gamma = 0.1$. Eingefügt ist die Differenz zwischen kovarianter (11) und nichtkovarianter (12) Lösung.*

Kosmische . . .
Die kovarianten . . .
Reduktion der . . .
Wachstumsraten . . .
Zusammenfassung . . .

Von Interesse ist auch das Verhalten der Maxima von Ω und κ in Abhängigkeit von der Anisotropie γ bzw. der thermischen Geschwindigkeit $\alpha = v_{th,a,\|}/c$:

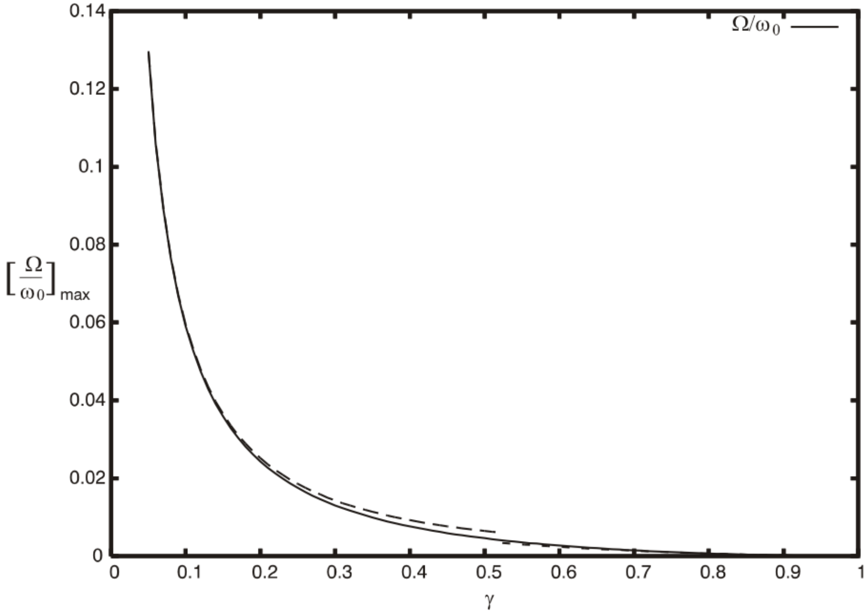

Abbildung 4: *Variation von* $\left[\frac{\Omega}{\omega_0}\right]_{\max}$ *als Funktion der Anisotropie* γ.

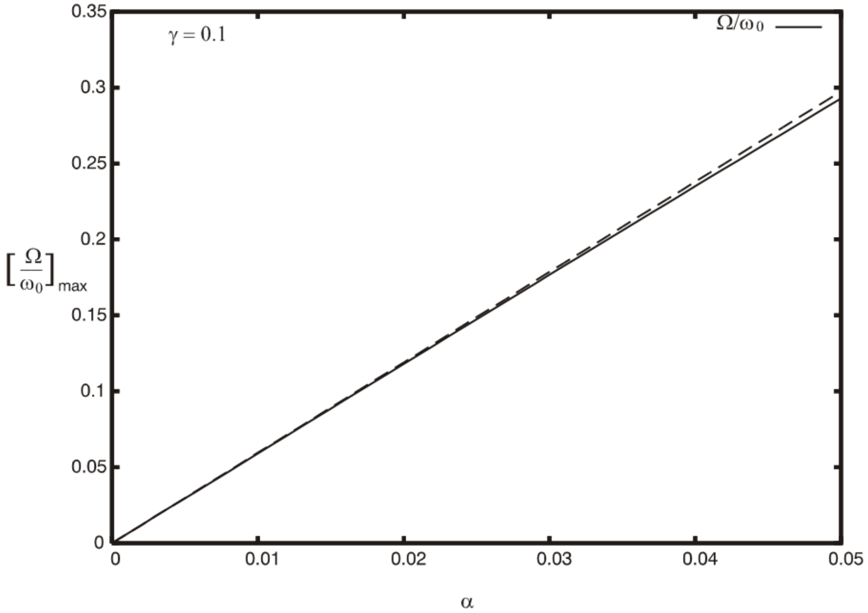

Abbildung 5: *Variation von* $\left[\frac{\Omega}{\omega_0}\right]_{\max}$ *als Funktion der thermischen Geschwindigkeit* α*.*

5. Zusammenfassung und Ausblick

- Herleitung der relativistisch korrekten Dispersionsrelationen und Untersuchung der Fälle für nichtrelativistische und hochrelativistische Plasmatemperaturen

- $\mu_a \gg 1$: Ausformulierung der Dispersionsrelationen und Anwendung auf Wachstumsraten der Weibel-Instabilität, Vergleich mit nichtrelativistischer Theorie

- $\mu_a \ll 1$: Bestimmung der Dispersionsrelationen, aber Integrale sehr schwierig zu lösen

- Neuer Ansatz: allgemeinen Untersuchung der Weibelinstabilität, d.h. Aussagen über Stabilität ohne Vorgabe einer bestimmten Verteilungsfunktion

Literatur

[1] **E.S. Weibel**, *Phys. Rev. Letters 2, 83*, 1959

[2] **B.D. Fried**, *Phys. Rev. Letters 2, 337*, 1959

[3] z.B. **G. Bekefi**, *Radiation Processes in Plasmas*, John Wiley & Sons New York 1966

[4] z.B. **R. Schlickeiser & M. Kneller**, *J. Plasma Phys. 57, 709*, 1997

[5] **B.D. Fried & S.D. Conte**, *The Plasma Dispersion Function*, Academic Press New York 1961

[6] **G. Kalman, C. Montes & D. Quemada**, *Phys. Fluids 11, 1797*, 1968