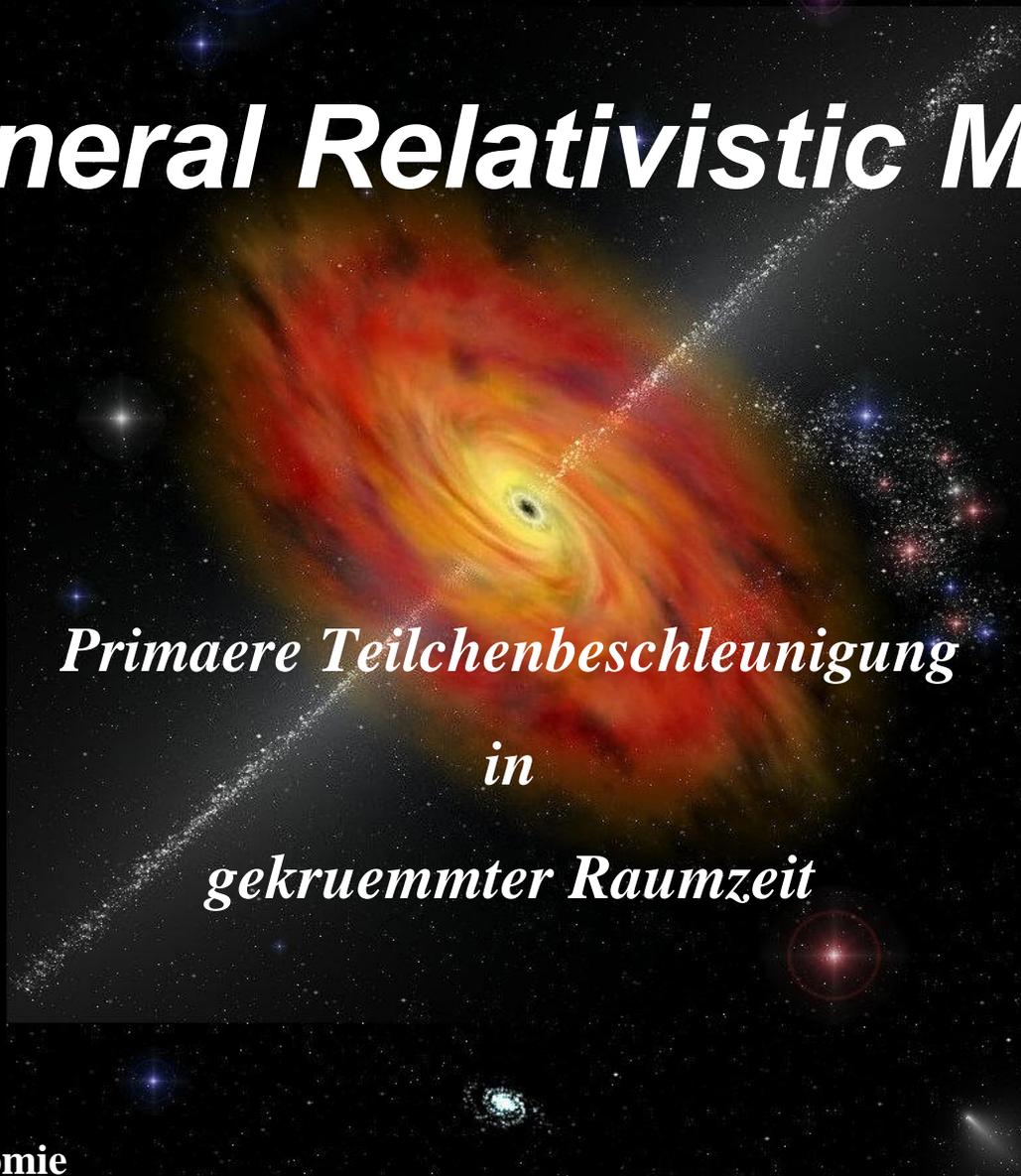


# *General Relativistic MHD*



*Primäre Teilchenbeschleunigung  
in  
gekruemmter Raumzeit*

**Oliver Elbracht**  
**Lehrstuhl fuer Astronomie**  
**Universitaet Wuerzburg, Germany**

**SAT 2006, 05. Oktober 2006**

# Outline

- **MHD Review**
- **Motivation**
- **Morphologie Schwarzer Loecher**
- **ADM Formalismus**
- **GRMHD Simulationen**
- **Gueltingkeitsbereich der GRMHD**
- **Kinetischer Ansatz**

# Review:

Zur Beschreibung eines Plasmas benoetigt man die magnetohydrodynamischen (MHD) Gleichungen:



## Hydrodynamik + Maxwell Gleichungen:

Kontinuitaetsgleichung:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho V) = 0$

EoM:  $\rho \frac{dV}{dt} = j \times B - \nabla p + \rho g$

Diff. magn. Gleichung:  $\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (V \times B)$

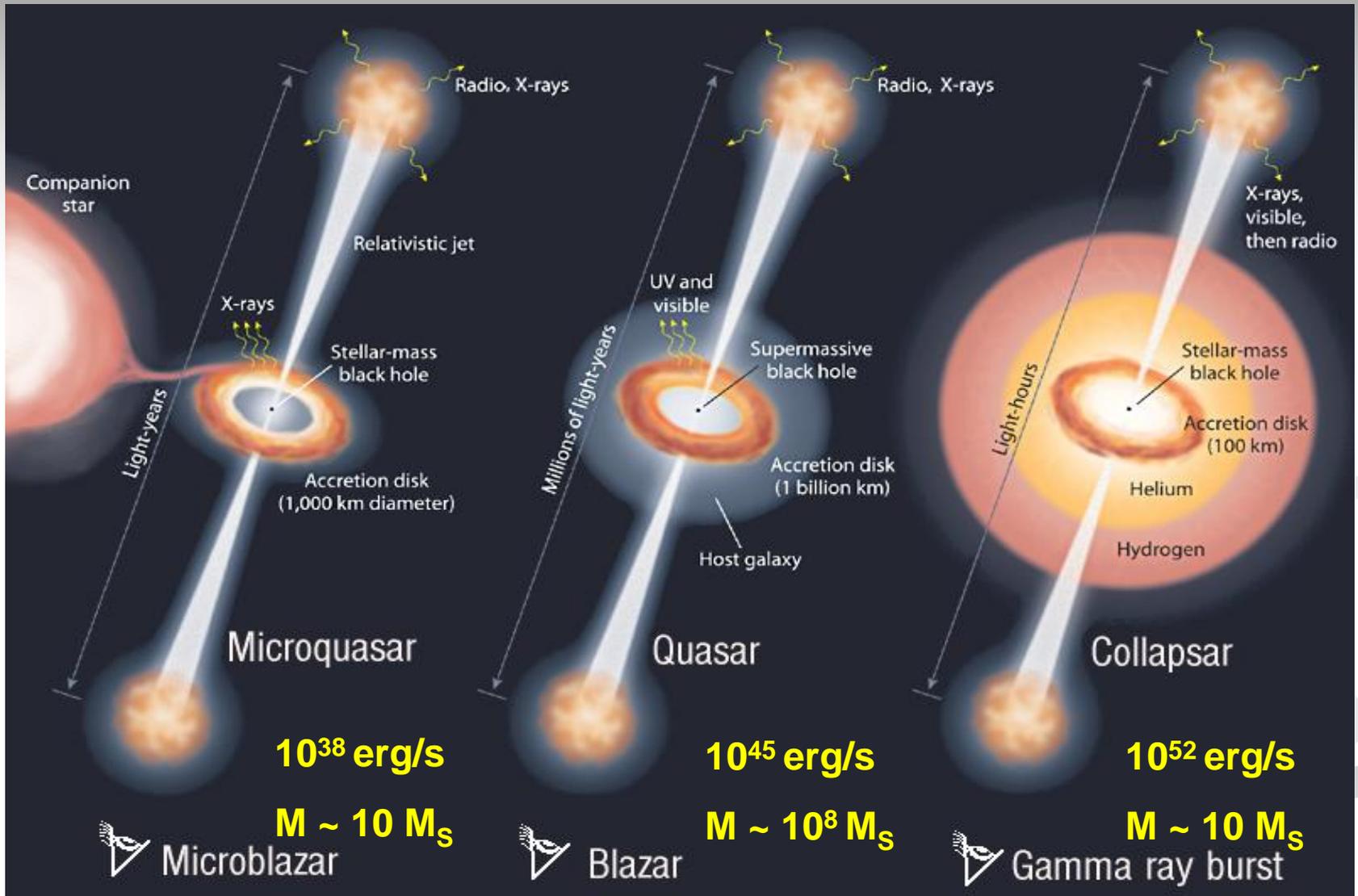
# Motivation

ART und relativistische (M)HD spielen eine Hauptrolle in der Beschreibung von gravitativem Kollaps & Teilchenbeschleunigung:

- Stellare Kernkollaps-Supernovae (Typ II/Ib/Ic)
- Schwarze Loch Formation (und Massenakkretion)
- Verschmelzung kompakter Objekte (NS/NS, BH/NS, BH/BH)
- Gamma Ray Bursts (GRB)
- Jet Bildung (BH + Disk)

Koide et al (1998 ...), De Villiers & Hawley (2003 ...), Gammie et al (2003 ...), Komissarov (2005), Anninos et al (2005)

# Schwarzes Loch – Jet – Scheibe Systeme



Mirabel & Rodriguez (Sky & Telescope, 2002)

# Morphologie

## Astrophysikalisch motivierte Problemstellung

- BH = Kerr  $\Rightarrow$  GR
- Akkretion = Plasmascheibe  $\Rightarrow$  MHD

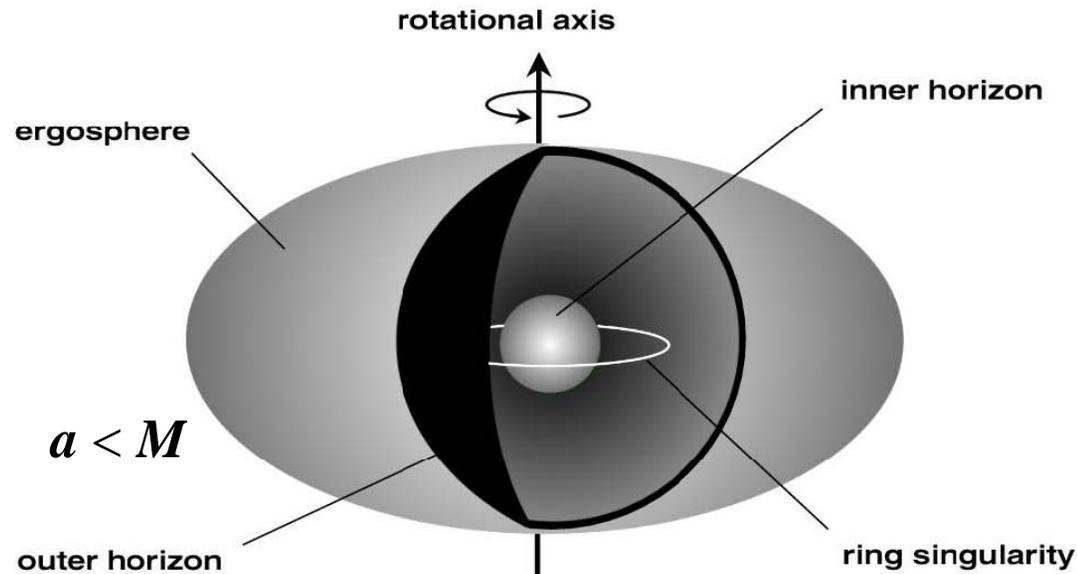
 **GRMHD**

## Parameter:

- Spin:  $J$
- Masse:  $M$
- Bis zu  $\approx 42\%$  an Energie extrahierbar

Dimensionsloser Spinparameter:

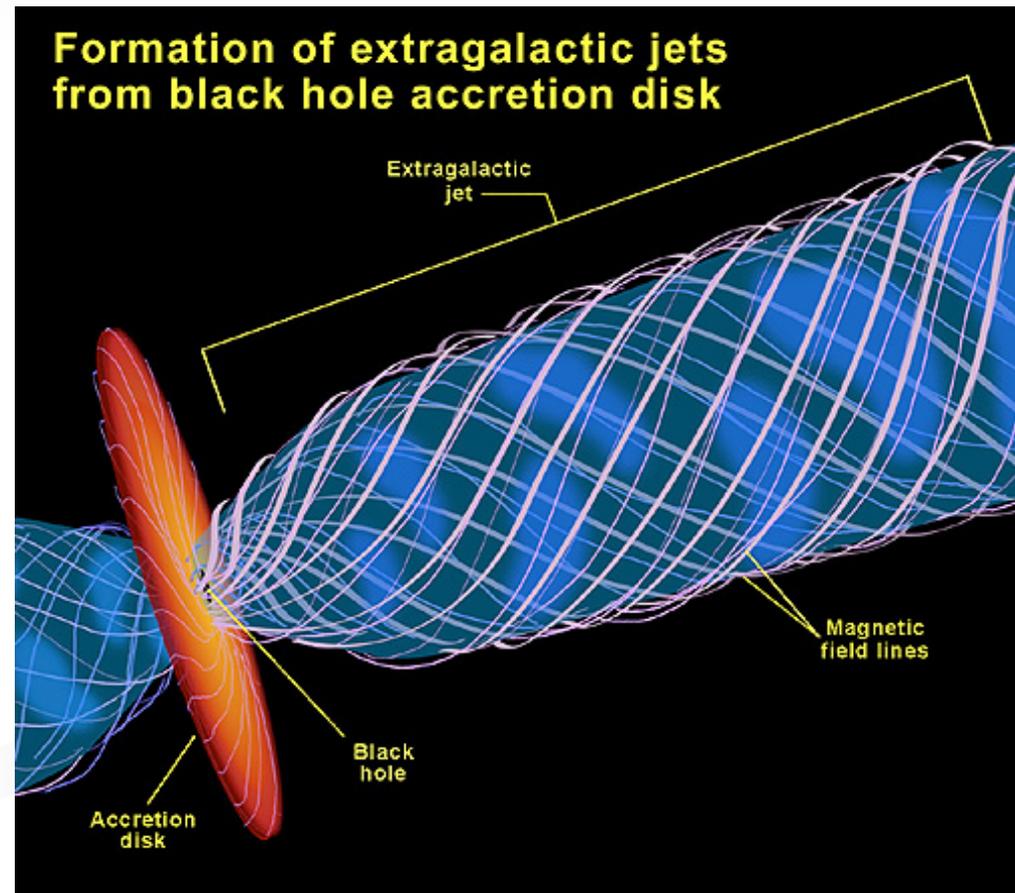
$$a = J / M \quad ; \quad -M \leq a \leq M$$



A.Mueller (2004)

# Schwarze Loecher - 2 Energie Reservoirs

- Potentielle Energie (gravitative Bindung der Scheibe)
  - ⇒ freigesetzt durch Massenakkretion
- Rotationsenergie des BH
  - ⇒ „angezapft“ durch magn. Felder, ähnlich dem Effekt bei rotierenden Neutronensternen (PP/BZ)



# ADM – Formalismus (1962)

ART reformuliert im sogenannten 3+1 Split (Cauchy-Problem)

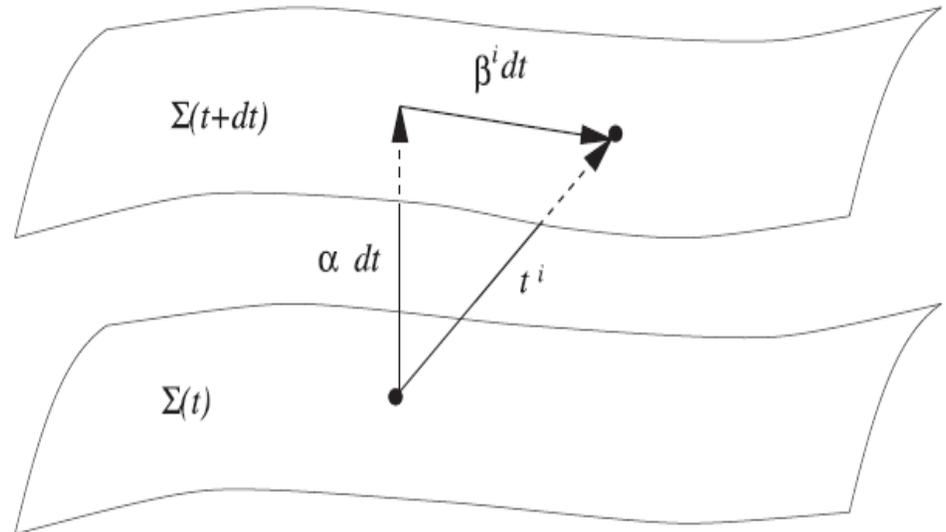
## Wähle Basis:

3 räumliche Vektoren, in den 3D raumartigen Hyperfläachen liegend

1 zeitartigen Vektor, normal zu den Hyperfläachen

Definition eines Zeitvektor (nicht zwingend identisch mit der Flächennormalen)

$$t^\mu = \alpha n^\mu + \beta^\mu$$



# ADM – Formalismus (1962)

## Evolutionssystem (evolution equations)

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha \mathbf{K}_{ij} + \nabla_i \beta_j + \nabla_j \beta_i$$

$$\partial_t \mathbf{K}_{ij} = -\nabla_i \nabla_j \alpha + \alpha (\mathbf{R}_{ij} + \mathbf{K} \mathbf{K}_{ij} - 2\mathbf{K}_{im} \mathbf{K}_j{}^m) + \beta^m \nabla_m \mathbf{K}_{ij} + \mathbf{K}_{im} \nabla_j \beta^m + \mathbf{K}_{jm} \nabla_i \beta^m - 8\pi \mathbf{T}_{ij}$$

## Randbedingungen (constraint equations)

$$\mathbf{R} + \mathbf{K}^2 - \mathbf{K}_{ij} \mathbf{K}^{ij} - 16\pi \mathbf{T}^{00} = 0 \quad \text{Energieerhaltung (Hamiltonian constraint)}$$

$$\nabla_i (\mathbf{K}^{ij} - \gamma^{ij} \mathbf{K}) - 8\pi \mathbf{S}^j = 0 \quad \text{Impulserhaltung (momentum constraint)}$$



Dynamisches System, geeignet z.B. fuer Kernkollaps-Szenarien

# 3+1 Split: E & M Feldgleichungen

- Elektromagnetischer Feldtensor  $F^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu} = n^\mu E^\nu - n^\nu E^\mu + n_\gamma \varepsilon^{\gamma\mu\nu\delta} B_\delta$$



$$E^\mu = F^{\mu\nu} n_\nu \quad B^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} n_\nu F_{\lambda\kappa}$$

- Ohmsches Gesetz

$$J^\mu + (J^\nu u_\nu) u^\mu = \sigma F^{\mu\nu} u_\nu$$

Nichtrelativistischer Grenzfall:  $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

Ideales MHD Limit ( $\sigma \rightarrow \infty$ )  $\Rightarrow$

$$F^{\mu\nu} u_\nu = 0 ; \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$$

# 3+1 Split: E & M Feldgleichungen

Maxwell Gleichungen:  $\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\mu$ ,  $\nabla_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0$ .

Ideale MHD Bedingung:  $u_\lambda F^{\mu\lambda} = 0$

Das magn. Feld eines Beobachters  $n^\mu$  normal zu den Hyperflaechen mit  $t = \text{konstant}$  :

$$B^\mu \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} n_\nu F_{\lambda\kappa}$$

Maxwell Gleichungen + MHD Bedingung



$$\partial_j (\sqrt{\gamma} \mathbf{B}^j) = 0 \quad (\text{keine magn. Monopole})$$

$$\partial_t (\sqrt{\gamma} \mathbf{B}^i) + \partial_j [\sqrt{\gamma} (\mathbf{v}^j \mathbf{B}^i - \mathbf{v}^i \mathbf{B}^j)] = 0 \quad (\text{Induktionsgleichung})$$

$\gamma = \det(\gamma_{ij}) = \text{Determinante der 3-Metrik}$ ,  $v^i \equiv u^i / u^0$ .

# Energie-Impuls Tensor

B-Feld & Impuls aus Sicht eines FIDO (fiducial observer):

$$b^\mu \equiv \frac{1}{2\sqrt{4\pi}} \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} u_\nu F_{\lambda\kappa} = -\frac{P^\mu{}_\nu B^\nu}{\sqrt{4\pi} n_\lambda u^\lambda} \quad ; \quad P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$$



$$T_{em}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F^{\mu\lambda} F^\nu{}_\lambda - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) = b^2 u^\mu u^\nu + \frac{1}{2} b^2 g^{\mu\nu} - b^\mu b^\nu$$

$$T_{fluid}^{\mu\nu} = \rho h u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}$$

Enthalpie:  $h = 1 + \varepsilon + \frac{P}{\rho}$

Zustandsgleichung:  $P = P(\rho, \varepsilon)$

( $\varepsilon$  = spezifische inner Energie)



$$T^{\mu\nu} = T_{fluid}^{\mu\nu} + T_{em}^{\mu\nu} = (\rho h + b^2) u^\mu u^\nu + \left( P + \frac{b^2}{2} \right) g^{\mu\nu} - b^\mu b^\nu$$

1. Massenerhaltung

$$\nabla_{\mu}(\rho \mathbf{u}^{\mu}) = 0$$

2. Energie- & Impulserhaltung

$$\nabla_{\mu} \mathbf{T}^{\mu\nu} = 0$$

3. Maxwell Gleichungen

$$\nabla_{\nu} F^{\mu\nu} = 4\pi J^{\mu}, \quad \nabla_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0.$$

• Induktionsgleichung

$$\partial_t(\sqrt{\gamma} \mathbf{B}^i) + \partial_j \left[ \sqrt{\gamma} (\mathbf{v}^j \mathbf{B}^i - \mathbf{v}^i \mathbf{B}^j) \right] = 0$$

• Keine B-Feld Quellen/Senken

$$\partial_j (\sqrt{\gamma} \mathbf{B}^j) = 0$$

**Hyperbolisches System**  
**1. Ordnung,**  
**Fluss erhaltend.**



**+Zwangsbedingung**

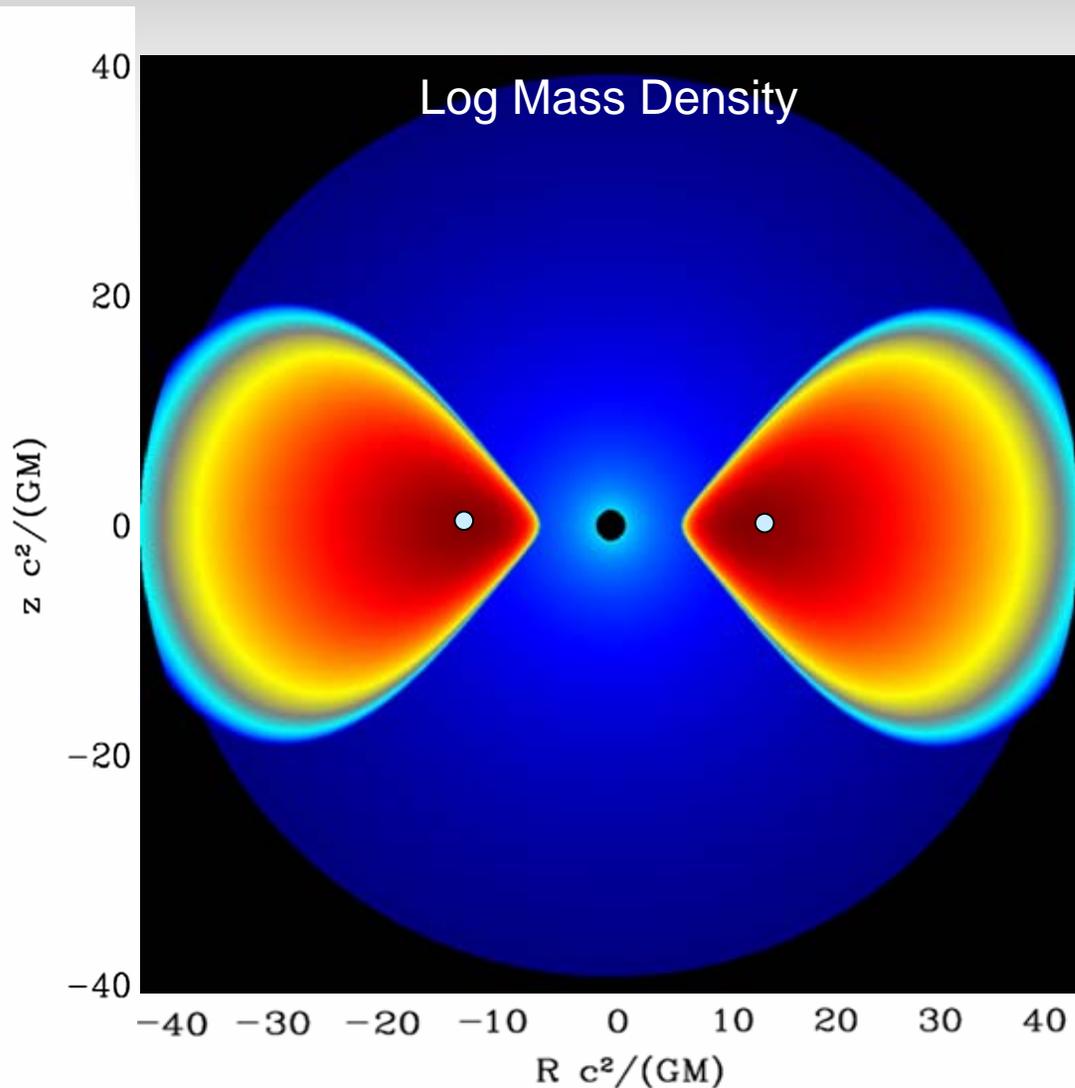
$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left( \frac{\partial \sqrt{\gamma} \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \sqrt{-g} \vec{f}^i}{\partial x^i} \right) = \vec{s}$$

$\vec{u}$  Zustandsvektor

$\vec{f}^i$  Fluss

$\vec{s}$  Quellen

# Numerische Modelle



Parameter:

$$a = 0.938$$

$$H / R \sim 0.26$$

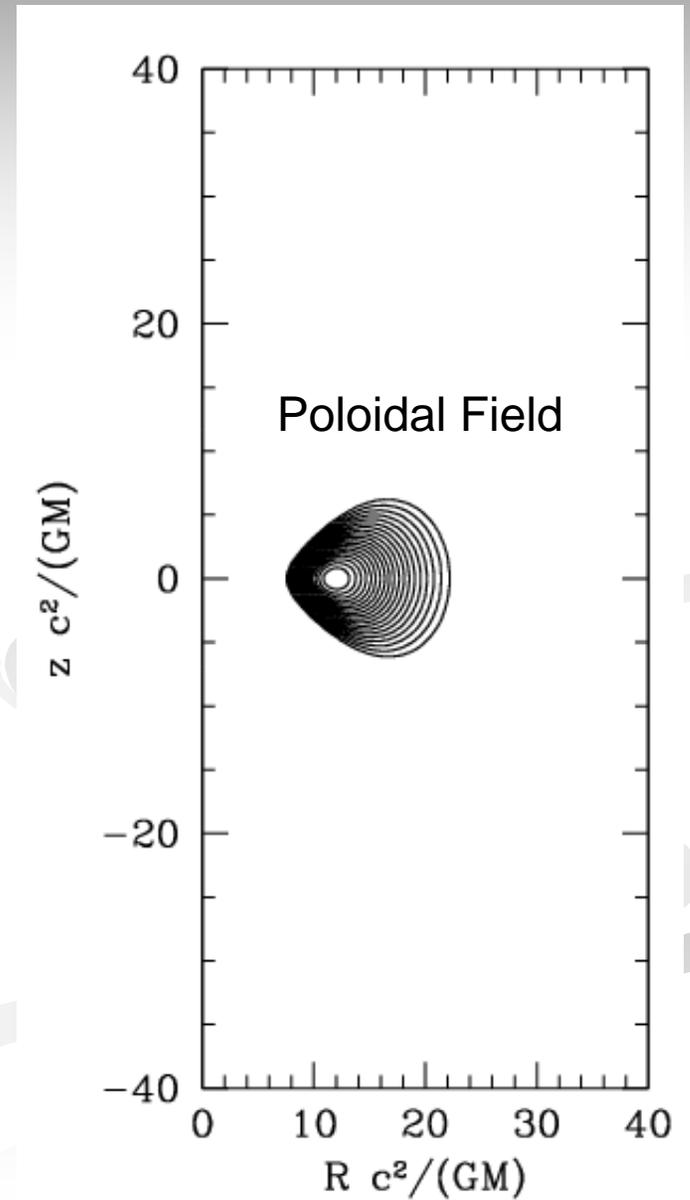
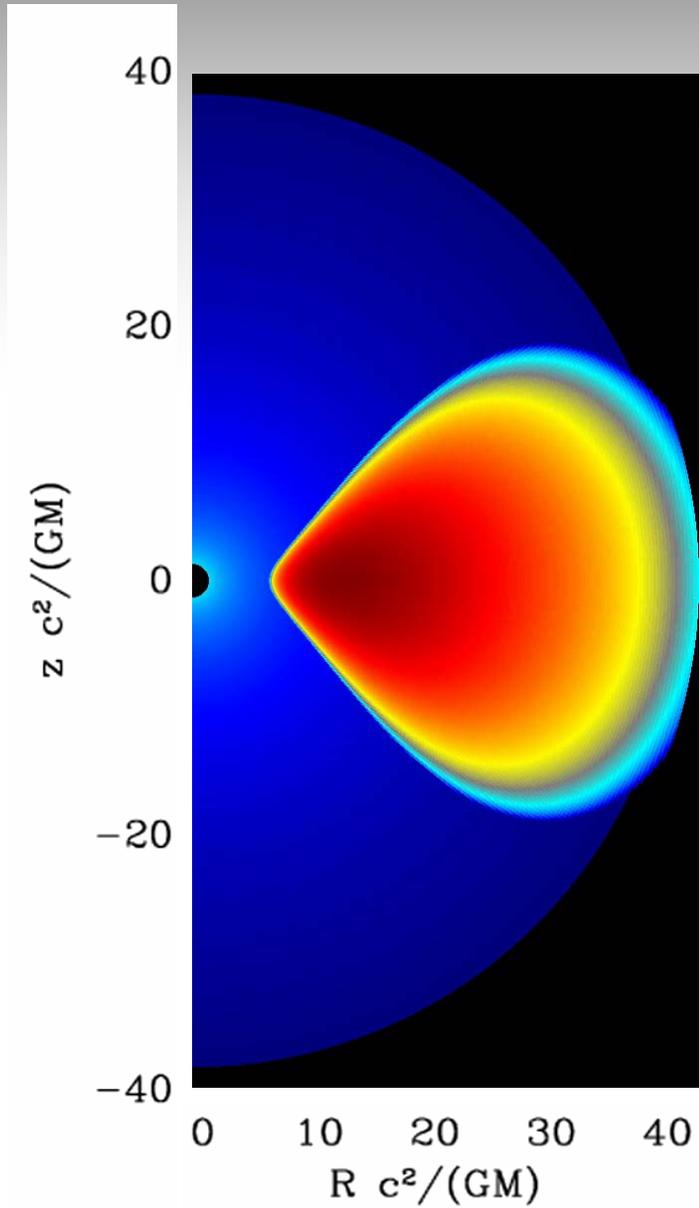
$$\gamma = 4/3$$

$$R_0 = 12M$$

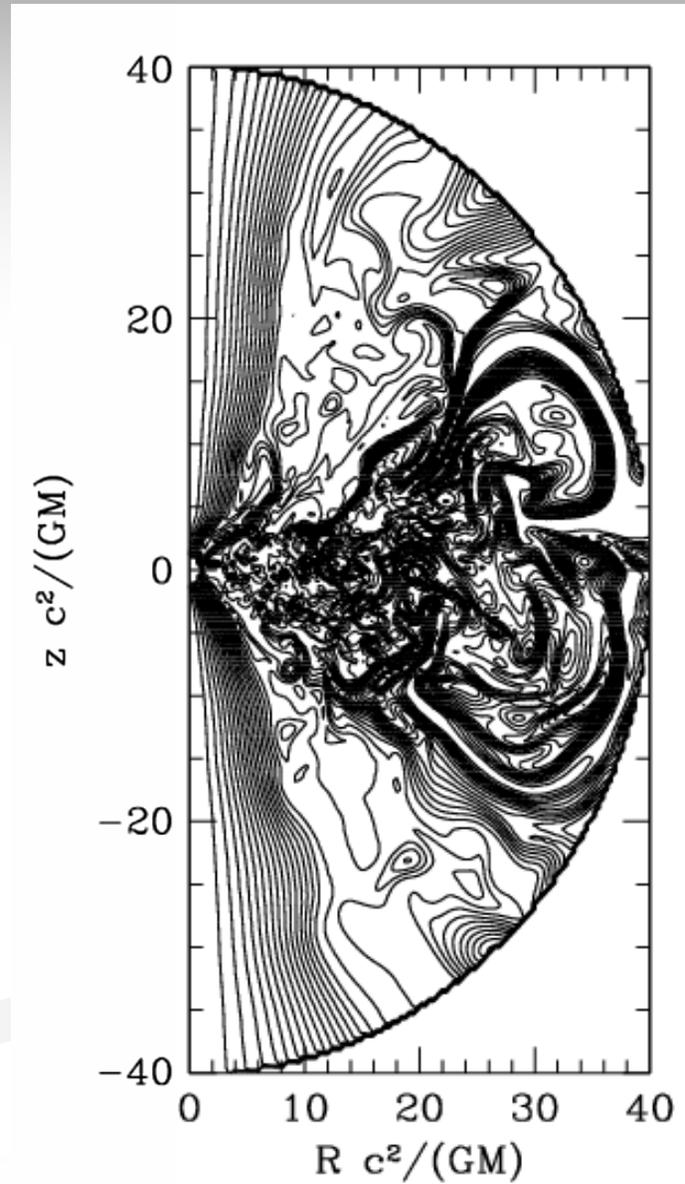
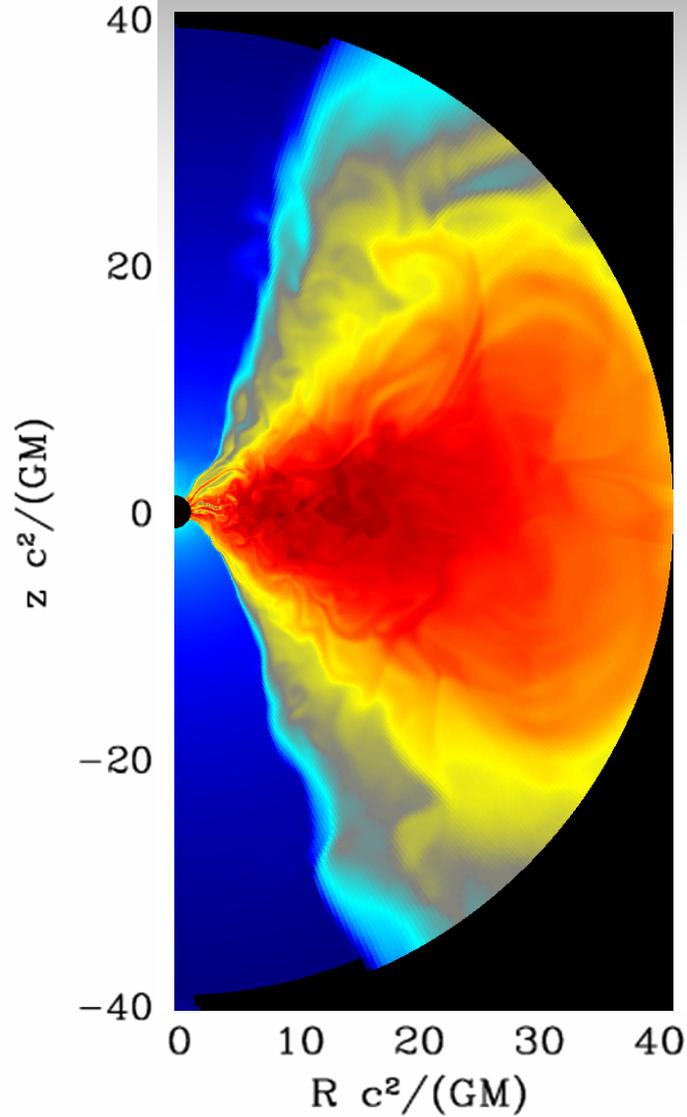
$$R_{out} = 40M$$

(Hawley, DeVilliers, Gammie,  
McKinney, Mizuno)

# Anfangszustand

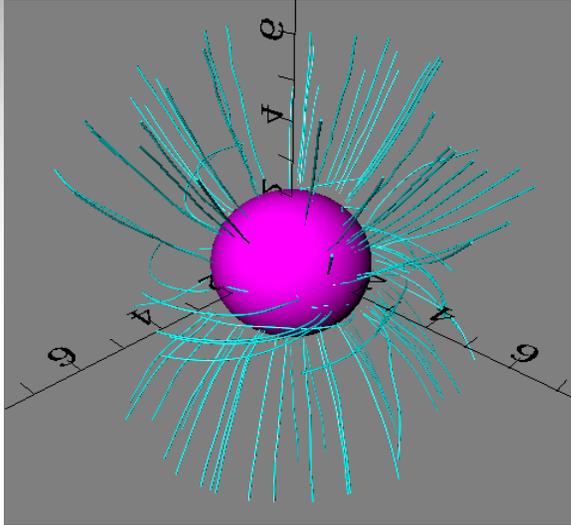


# Endzustand

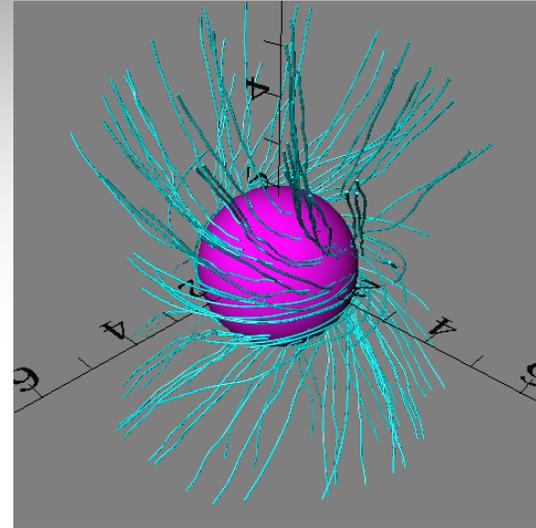


# Feldlinien “aufgewickelt” durch BH

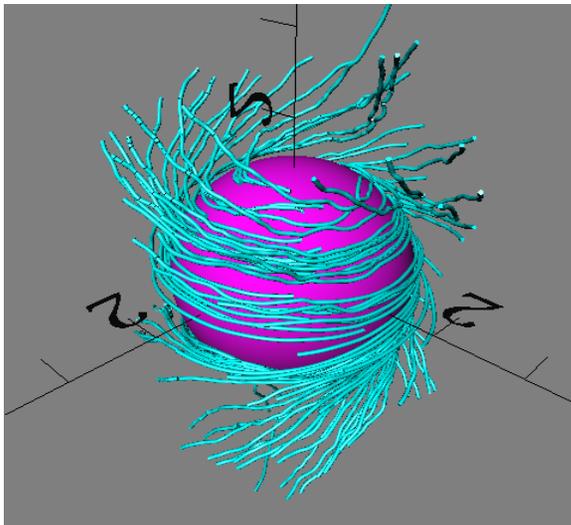
$a = 0$



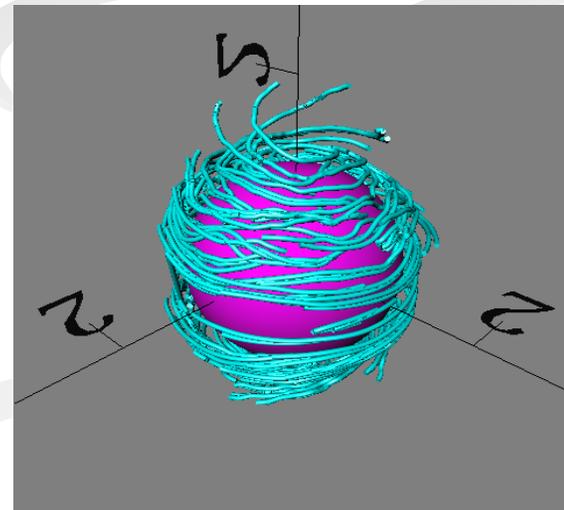
$a = 0.5$



$a = 0.9$



$a = .998$



# Grenzen der MHD

Der Grenzfall der idealen MHD beschreibt eine inkompressible, neutrale Flüssigkeit mit verschwindender Resistivität und Viskosität.

Bedingungen fuer eine Fluidbeschreibung:

Freie Weglaenge

$$\lambda \ll L ; \lambda = \frac{1}{n\sigma}$$

Kollisionsrate

$$\nu \ll 1/T ; \nu = 1/\tau$$

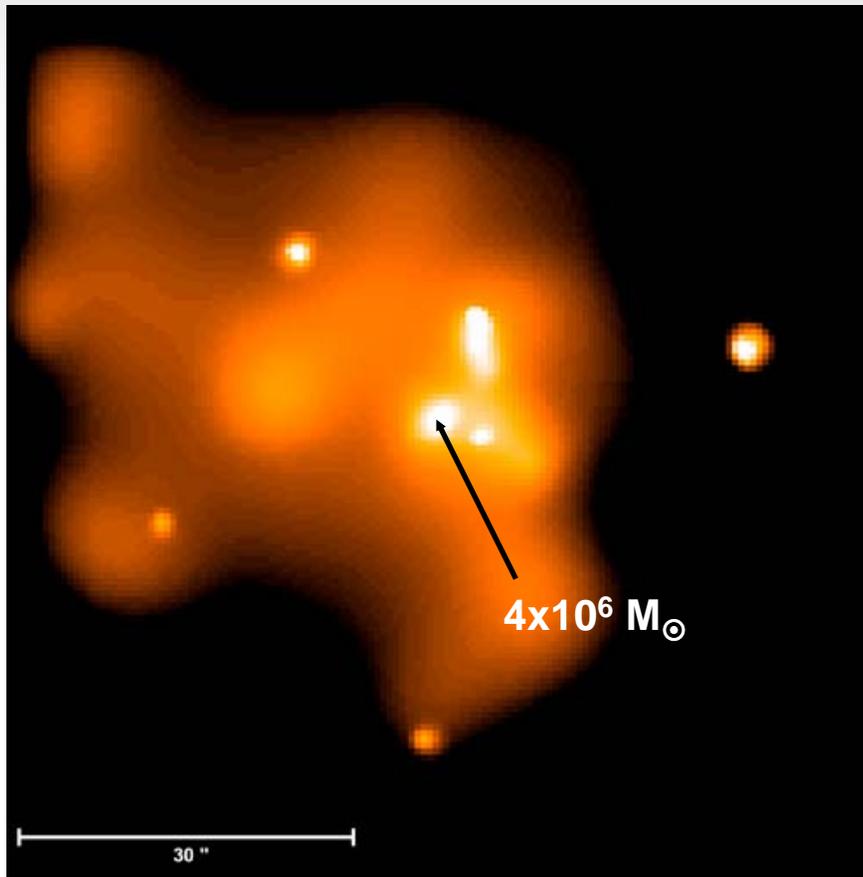
Geringe thermische Leitfaehigkeit  $\Leftrightarrow$  Entropieerhaltung

Kleine Viskosität  $\Leftrightarrow$  Isotroper Druck

**Sinnvolle Naeherung fuer astrophysikalische Ereignisse?**

# Grenzen der MHD

Plasma & BH im Zentrum der Galaxy



Genaherte Bedingungen in der Naehе des BH

$$T_p \sim 10^{12} \text{ K}$$

$$T_e \sim 10^{11} \text{ K}$$

$$n \sim 10^6 \text{ cm}^{-3}$$

$$\sigma \approx \frac{10^{-12}}{T_{eV}^2} \text{ cm}^2$$



Protonen mfp  $\sim \text{kpc} \gg R_s$

Kollisionszeitskala  $\tau \gg T$

Es ist noetig die Akkretion eines magnetisierten, kollisionsfreien Plasmas zu verstehen!

# Kinetische MHD (Kulsrud 1983)

## Modell:

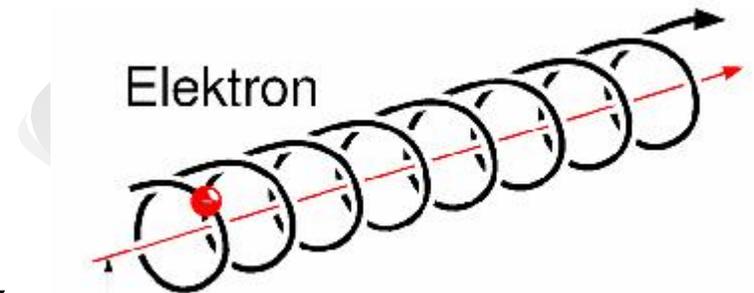
- Kollisionsfreies Plasma in Richtung der Feldlinien
- Teilchen strömen kollisionsfrei entlang der magn. Feldlinien mit

$$\rho \ll mfp \ll L$$

Gyroradius

$$\Omega \gg \omega$$

Gyrofrequenz



# Kinetische MHD (Kulsrud 1983)

Entwickle Vlasov Gleichung in  $1/\Omega$  und  $\rho$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0,$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{4\pi} - \nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{F}_g,$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}),$$

$$\mathbf{P} = p_{\perp} \mathbf{I} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \hat{\mathbf{b}} \hat{\mathbf{b}},$$

Die Kinetische-Drift MHD ist eine Erweiterung des MHD Bildes



Anisotroper Druck durch korrekte Berechnung des grossen Hitzefflusses entlang der Linien, in Abwesenheit von Kollisionen

# Kinetische MHD (Kulsrud 1983)

-

## Zusammenfassung

- Inwieweit ist die KMHD eine physikalisch bessere Näherung zur Beschreibung von Ereignissen wie Massenakkretion auf BH?

- Auch die KMHD ist ideal  $\Rightarrow \sigma$  GRMHD

(Watanabe & Yokoyama, astro-ph/0607285)

$\Rightarrow$  Ziel ist eine allgemeinrelativistische vollkinetische Beschreibung

**Thank you for your attention!**